数理解析研究所講究録
第1618巻 2008年 82-88

放物型 Hardy 空間における Carleson measure inequality

中川　勇人*

概要

上半空間上の放物型作用素の解空間として定まる関数空間において Carleson 測度不等式を考察する．ここでは Hardy 空間 h_{α}^{p} に属する関数に関する不等式について $p>2$ のときに限り示す．さらに不等式に現れる定数部分は新たに定義する T_{τ}-Carleson 測度によって表されることを示す．

1 序

実上半空間 $\mathbb{R}_{+}^{n+1}:=\{(x,t)\in\mathbb{R}^{n+1}\mid x\in\mathbb{R}^{n},t>0\}\ (n\geq 1)$ において，放物型作用素 $L^{(\alpha)}$ は,

$$L^{(\alpha)}:=\partial_{t}+(-\Delta_{x})^{\alpha}\qquad(0<\alpha\leq 1)$$

で定義され，超関数の意味で $L^{(\alpha)}u=0$ が成立する連続関数 u を $(\alpha$-$)$ 放物型関数と呼ぶ([NSS])．Hardy 型ノルムが有限になる放物型関数である連続関数全体を h_{α}^{p} とおき，単に「放物型 Hardy 空間」と呼ぶことにする (See section 2)．放物型 Hardy 空間の有する性質を調べることは大きな研究テーマであるが，ここでは Carleson 測度不等式を取り扱う．

従来の Carleson 測度を拡張した T_{τ}-Carleson 測度を導入する (See section 3)．Carleson 定数もそれに伴い T_{τ}-Carleson 定数へと拡張される．T_{τ}-Carleson 測度を用いて以下の主定理を得た．

定理 1.1 (Carleson measure inequality for $p>2$).
μ を $\mathbb{R}_{+}^{n+1}$ 上正 Borel 測度，$0<\alpha\leq 1, 2<p\leq\infty, \tau=\frac{n}{2\alpha}/(\frac{n}{2\alpha}+1)$ とする．このとき，ある定数 $C>0$ が存在して $u\in h_{\alpha}^{p}$ に対して,

$$\|u\|_{L^{p}(\mathbb{R}_{+}^{n+1},d\mu)}\leq C(\kappa_{\tau}^{(\alpha)}[\mu])^{\frac{1}{p}}\|u\|_{h_{\alpha}^{p}}.$$

* 名古屋大学多元数理, E-mail : m04026b@math.nagoya-u.ac.jp
2000 Mathematics Subject Classification: Primary 35K05; Secondary 26D10, 31B10
Keywords and phrases: Parabolic operator, Hardy space, Carleson measure inequality
A talk at RIMS meeting "再生核の応用についての研究" organized by Saburo Saito, September 10 - 12, 2008.

Verbitsky([V, Corollary 2.2.]) により，以下のような Poisson 積分についての Carleson 測度不等式が知られている．

系 1.2 (Corollary 2.2. of [V]).
μ を $\mathbb{R}^{n+1}_+$ 上正 Borel 測度，$2 < p \leq \infty$ とする．このとき，ある定数 $C > 0$ が存在して $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ に対して，

$$\|P[f]\|_{L^p(\mathbb{R}^{n+1}_+, d\mu)} \leq C(\kappa[\mu])^{\frac{1}{p}} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

ここで，$P[f]$ は f の Poisson 積分，$\kappa[\mu]$ は μ の Carleson 定数である．

今回の結果はこれを含んでいる．すなわち，定理 1.1 において $\alpha = 1/2$ とすれば系 1.2 の結果に一致する．
定理 1.1 は Lorentz 空間およびその補間定理 (See section 4) を用いることで証明を見通しよくすることが出来る．Section 5 ではその証明を与える．

2 放物型 Hardy 空間

放物型 Hardy 空間 h^p_α を，

$$h^p_\alpha := \{u\colon \mathbb{R}^{n+1}_+ \text{上}\ \alpha\text{-放物型かつ連続関数} \mid \|u\|_{h^p_\alpha} < \infty\} \quad (1 < p \leq \infty)$$

と定義する．ここで，ノルムは

$$\|u\|_{h^p_\alpha} := \begin{cases} \sup\limits_{t>0} \left(\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} |u(x,t)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} & (1 < p < \infty), \\ \sup\limits_{(x,t)\in\mathbb{R}^{n+1}_+} |u(x,t)| & (p = \infty). \end{cases}$$

と定めることにする．
$L^{(\alpha)}$ の基本解は，

$$W^{(\alpha)}(x,t) := \begin{cases} (2\pi)^{-n} \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} e^{-t|\xi|^{2\alpha}} e^{ix\cdot\xi}\, d\xi & (x \in \mathbb{R}^n, t > 0), \\ 0 & (x \in \mathbb{R}^n, t \leq 0). \end{cases}$$

で定義され，$\alpha = 1/2, 1$ のときそれぞれ Poisson 核，Gauss 核に一致する：

$$W^{(1/2)}(x,t) = \begin{cases} \Gamma(\frac{n+1}{2}) \dfrac{t}{(|x|^2 + t^2)^{\frac{n+1}{2}}} & (x \in \mathbb{R}^n, t > 0), \\ 0 & (x \in \mathbb{R}^n, t \leq 0), \end{cases}$$

$$W^{(1)}(x,t) = \begin{cases} (4\pi t)^{-n/2} e^{-|x|^2/4t} & (x \in \mathbb{R}^n, t > 0), \\ 0 & (x \in \mathbb{R}^n, t \leq 0). \end{cases}$$

この基本解 $W^{(\alpha)}(x,t)$ について次の命題が成立する．

命題 2.1. h^p_α に属する関数 $u(x,t)$ に対して，$u(x,t)=\int_{\mathbb{R}^n} W^{(\alpha)}(x-y,t)f(y)dy$ を満たす関数 $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ がただ一つ存在する．逆に，関数 $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ に対して $u(x,t)=\int_{\mathbb{R}^n} W^{(\alpha)}(x-y,t)f(y)dy$ と関数 $u(x,t)$ を定めると $u \in h^p_\alpha$ である．

基本解 $W^{(\alpha)}(x,t)$ については次の semigroup property が成り立つ：

$$W^{(\alpha)}(x,t)=\int_{\mathbb{R}^n} W^{(\alpha)}(x-y,t-s)W^{(\alpha)}(y,s)\,dy \quad (0<s<t).$$

また，以下の評価式は重宝する．

補題 2.2.
ある定数 $C>0$ が存在して，$(x,t)\in\mathbb{R}^{n+1}_+$ について，

$$W^{(\alpha)}(x,t)\le C\frac{t}{(t+|x|^{2\alpha})^{\frac{n}{2\alpha}+1}}.$$

上半空間において Bergman 空間に放物型作用素を導入した空間 b^p_α は

$$b^p_\alpha := \{u\colon \mathbb{R}^{n+1}_+ \text{上}\ \alpha\text{-放物型かつ連続関数} \mid \|u\|_{L^p(\mathbb{R}^{n+1}_+,dV)}<\infty\}\ (1\le p\le\infty)$$

で定義される（dV は体積要素による測度）．$b^p_{1/2}, b^p_1$ はそれぞれ L^p である調和関数全体，熱方程式の解全体に一致する．b^p_α 上での Carleson 測度不等式については，[NSY] において得られている結果を Section 5 で紹介する．

3 Carleson 測度の拡張

Carleson 測度を放物型 Hardy 空間 h^p_α についての Carleson 測度不等式が要請する方向で拡張する．

定義 3.1 (T_τ-Carleson measure, T_τ-Carleson constant).
$0<\alpha\le 1$, μ を $\mathbb{R}^{n+1}_+$ 上正 Borel 測度，$\tau>0$ とするとき，ある定数 $C>0$ が存在して，

$$\mu(T^{(\alpha)}(x,t))\le Ct^{(\frac{n}{2\alpha}+1)\tau}$$

が満たされているとき，μ を T_τ-Carleson 測度 (with respect to $L^{(\alpha)}$) と呼ぶ．ここで，$T^{(\alpha)}(x,t) := \{(y,s)\in\mathbb{R}^{n+1}_+ \mid |y-x|^{2\alpha}+s\le t\}$ ($(x,t)\in\mathbb{R}^{n+1}_+$) とする．また，

$$\kappa^{(\alpha)}_\tau[\mu] := \sup_{(x,t)\in\mathbb{R}^{n+1}_+}\frac{\mu(T^{(\alpha)}(x,t))}{t^{(\frac{n}{2\alpha}+1)\tau}}$$

とおき，T_τ-Carleson 定数と呼ぶ．

定義 3.1 において，$\alpha = 1/2$ とすると従来の Carleson 測度およびその定数になる．[NSY] では b^p_α についての Carleson 測度不等式が要請する拡張された測度 τ-Carleson 測度が定義されている．

定義 3.2 (τ-Carleson measure, Definition 1 of [NSY]).
$0 < \alpha \leq 1$, μ を $\mathbb{R}^{n+1}_+$ 上正 Borel 測度，$\tau > 0$ とするとき，ある定数 $C > 0$ が存在して，

$$\mu(Q^{(\alpha)}(x,t)) \leq Ct^{(\frac{n}{2\alpha}+1)\tau}$$

が満たされているとき，μ を τ-Carleson 測度 (with respect to $L^{(\alpha)}$) と呼ぶ．ここで，$Q^{(\alpha)}(x,t)$ は Carleson box と呼ばれ，$Q^{(\alpha)}(x,t) := \{(y_1, y_2, \ldots, y_n, s) \in \mathbb{R}^{n+1}_+ \mid t \leq s \leq 2t, |y_i - x_i| \leq 2^{-1}t^{\frac{1}{2\alpha}}, i = 1, 2, \ldots, n\}$ $((x,t) \in \mathbb{R}^{n+1}_+)$ と定義されるものである．

T_τ-Carleson 測度と τ-Carleson 測度との関係は以下のようになる．

命題 3.3.
$\frac{n}{2\alpha}/(\frac{n}{2\alpha}+1) < \tau$ のとき，μ が T_τ-Carleson 測度 であることと μ が τ-Carleson 測度であることは同値である．

注意 3.4.
$\frac{n}{2\alpha}/(\frac{n}{2\alpha}+1) \geq \tau$ のときには，μ が T_τ-Carleson 測度 であることと μ が τ-Carleson 測度 であることは異なる．特に，T_τ-Carleson 測度 は τ-Carleson 測度 であるが，逆は必ずしも正しくない．

命題 3.3 の証明
$Q^{(\alpha)}(x,t) \subset T^{(\alpha)}(x, ((n/4)^\alpha + 2)t)$ であるから

$$\mu(Q^{(\alpha)}(x,t)) \leq \mu(T^{(\alpha)}(x, ((n/4)^\alpha + 2)t)) \leq C((n/4)^\alpha + 2)^{(\frac{n}{2\alpha}+1)\tau} t^{(\frac{n}{2\alpha}+1)\tau}$$

となり，μ が T_τ-Carleson 測度であれば τ-Carleson 測度であることがわかる．
逆は，適切な $\{x_{k,i}\}$ をとることで $T^{(\alpha)}(x,t) \subset \bigcup_{k\geq 0,i} Q^{(\alpha)}(x_{k,i}, t/2^{k+1})$ (ここで，各 k について $Q^{(\alpha)}(x_{k,i}, t/2^{k+1})$ は $2^{1+\frac{1+k}{2\alpha}}$ 個とる) とできるので，

$$\begin{aligned}\mu(T^{(\alpha)}(x,t)) &\leq \sum_{k,i} \mu(Q^{(\alpha)}(x_{k,i}, t/2^{k+1})) \leq \sum_{k=0}^{\infty} 2^{(1+\frac{1+k}{2\alpha})n} (t/2^{k+1})^{(\frac{n}{2\alpha}+1)\tau} \\ &\leq 2^{(1+\frac{1}{2\alpha})n - (\frac{n}{2\alpha}+1)\tau} t^{(\frac{n}{2\alpha}+1)\tau} \sum_{k=0}^{\infty} 2^{k(\frac{n}{2\alpha} - (\frac{n}{2\alpha}+1)\tau)}\end{aligned}$$

となり，$\frac{n}{2\alpha}/(\frac{n}{2\alpha}+1) < \tau$ であれば μ は T_τ-Carleson 測度であることがわかる．

4 Lorentz 空間

証明に使う道具の一つとして Lorentz 空間がある．Lorentz 空間 $L^{p,q}$ は次のように定義される．

定義 4.1 (Lorentz space, [SW]).
可測空間 $(M, \mathcal{M}, \mu)$ 上で定義された可測関数 f について,

$$f \in L^{p,q}(M, d\mu)$$
$$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad \|f\|_{L^{p,q}(M,d\mu)} := \begin{cases} \left(\dfrac{q}{p}\displaystyle\int_0^\infty \left(t^{\frac{1}{p}} f^*(t)\right)^q \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}} < \infty & (1 \le p < \infty, 1 \le q < \infty), \\ \sup\limits_{t>0} t^{\frac{1}{p}} f^*(t) < \infty & (1 \le p \le \infty, q = \infty). \end{cases}$$

ここで, $\lambda_f(s) := \mu(\{x \in \mathbb{R}^n \mid |f(x)| > s\}), f^*(t) := \inf\{s \mid \lambda_f(s) \le t\}$ である.

Lorentz 空間について知られている性質として次のようなものがある.

補題 4.2 ([SW], [BS]).
Lorentz 空間 $L^{p,q}(M, d\mu)$ について以下のことが成立する.
(i) $1 < p \le \infty, 1 < q \le \infty$ のとき, $L^{p,q}(M, d\mu)$ は Banach 空間となる.
(ii) $1 \le p \le \infty$ について $L^{p,p}(M, d\mu) = L^p(M, d\mu)$ である.
(iii) $1/p + 1/p' = 1/q + 1/q' = 1, 1 < p, q < \infty$ として $(L^{p,q}(M, d\mu))^* \simeq L^{p',q'}(M, d\mu)$ である.
(iv) $q_1 \le q_2$ のとき $L^{p,q_1}(M, d\mu) \subset L^{p,q_2}(M, d\mu)$ である.

また, Lorentz 空間は補間定理との相性が良い.

定理 4.3 (Marcinkiewicz interpolating theorem for Lorentz spaces, [BL]).
μ, ν を正 Borel 測度, $(U, d\mu), (V, d\nu)$ を可測空間とする. $p_0 \ne p_1, q_0 \ne q_1, r_0 \ge 1, r_1 \ge 1, s_0 \ge 1, s_1 \ge 1$ として, $T\colon L^{p_0,r_0}(U, d\mu) \longrightarrow L^{q_0,s_0}(V, d\nu)$ および $T\colon L^{p_1,r_1}(U, d\mu) \longrightarrow L^{q_1,s_1}(V, d\nu)$ がそれぞれ線形かつ有界, すなわち,

$$\sup_{f \ne 0} \frac{\|Tf\|_{L^{q_0,s_0}(V,d\nu)}}{\|f\|_{L^{p_0,r_0}(U,d\mu)}} =: M_0 < \infty, \quad \sup_{f \ne 0} \frac{\|Tf\|_{L^{q_1,s_1}(V,d\nu)}}{\|f\|_{L^{p_1,r_1}(U,d\mu)}} =: M_1 < \infty$$

ならば, $0 < \theta < 1, 1/p = (1-\theta)/p_0 + \theta/p_1, 1/q = (1-\theta)/q_0 + \theta/q_1, 1 \le r \le \infty, 1 \le s \le \infty$ として $T\colon L^{p,r}(U, d\mu) \longrightarrow L^{q,s}(V, d\nu)$ も線形かつ有界, すなわち,

$$\sup_{f \ne 0} \frac{\|Tf\|_{L^{q,s}(V,d\nu)}}{\|f\|_{L^{p,r}(U,d\mu)}} =: M < \infty$$

であり, $M \le M_0^{1-\theta} M_1^\theta$ が成り立つ.

5 $p > 2$ のときの Carleson 測度不等式

定理 1.1 の証明を行う. 条件に合うように μ, α, p, τ をとり固定する. ノルムの定め方を考慮すれば, ある定数 $C > 0$ が存在して u に対して命題 2.1 をみたす $f \in L^p(\mathbb{R})$ につ

いて

$$\|u\|_{L^{2,\infty}(\mathbb{R}^{n+1}_+,d\mu)} \le C(\kappa_T^{(\alpha)}[\mu])^{\frac{1}{2}}\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \tag{1}$$

を示せばよいことがわかる．これは，定理 4.3 において $U=\mathbb{R}^n, V=\mathbb{R}^{n+1}_+$ および $(p_0,q_0,r_0,s_0,p_1,q_1,r_1,s_1)=(2,2,2,\infty,\infty,\infty,\infty,\infty)$ とするとある定数 $C>0$ が存在して $M_0=C(\kappa_T^{(\alpha)}[\mu])^{\frac{1}{2}}, M_1=C$ となり，$\theta=1-(2/p)$ とすれば $M\le C(\kappa_T^{(\alpha)}[\mu])^{\frac{1}{p}}$ が得られるからである．ここで，

$$W_{\alpha,\mu}[g](x) := \int_{\mathbb{R}^{n+1}_+} g(x-y,t)W^{(\alpha)}(y,t)d\mu(y,t) \quad (x\in\mathbb{R}^n)$$

とおくと，補題 4.2(iii) より (1) は

$$\|W_{\alpha,\mu}[g]\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \le C(\kappa_T^{(\alpha)}[\mu])^{\frac{1}{2}}\|g\|_{L^{2,1}(\mathbb{R}^{n+1}_+,d\mu)} \tag{2}$$

と同値である．E を $\mathbb{R}^{n+1}_+$ 上の可測部分集合として $g=\chi_E$（E の定義関数）としてよい([SW, p195, Theorem 3.13.])．すなわち，ある定数 $C>0$ が存在して，

$$\|W_{\alpha,\mu}[\chi_E]\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} \le C(\kappa_T^{(\alpha)}[\mu])\mu(E) \tag{3}$$

とできることを示せばよい．基本解の semigroup property と補題 2.2 より

$$\begin{aligned}
\|W_{\alpha,\mu}[\chi_E]\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} &= \int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_E W^{(\alpha)}(x-y,t)d\mu(y,t)\right)^2 dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{E\times E} W^{(\alpha)}(x-y,t)W^{(\alpha)}(x-z,s)d\mu(y,t)d\mu(z,s)\right)dx \\
&= \int_{E\times E} W^{(\alpha)}(y-z,t+s)d\mu(y,t)d\mu(z,s) \\
&\le C\int_{E\times E}\frac{t+s}{(t+s+|y-z|^{2\alpha})^{\frac{n}{2\alpha}+1}}d\mu(y,t)d\mu(z,s) \\
&\le C\int_E\left(\int_{\mathbb{R}^{n+1}_+}\frac{t}{(t+s+|y-z|^{2\alpha})^{\frac{n}{2\alpha}+1}}d\mu(z,s)\right)d\mu(y,t) \\
&\quad + C\int_E\left(\int_{\mathbb{R}^{n+1}_+}\frac{s}{(t+s+|y-z|^{2\alpha})^{\frac{n}{2\alpha}+1}}d\mu(y,t)\right)d\mu(z,s)
\end{aligned}$$

であるから，ある定数 $C>0$ が存在して

$$\sup_{(y,t)\in\mathbb{R}^{n+1}_+}\int_{\mathbb{R}^{n+1}_+}\frac{t}{(t+s+|y-z|^{2\alpha})^{\frac{n}{2\alpha}+1}}d\mu(z,s) \le C(\kappa_T^{(\alpha)}[\mu]) \tag{4}$$

とできることを示せばよいことになる．$C>0$ を定数として，

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} \frac{t}{(t+s+|y-z|^{2\alpha})^{\frac{n}{2\alpha}+1}} d\mu(z,s) &= t\int_t^\infty \left(\int_{\{t+s+|y-z|^{2\alpha}\le r\}} d\mu(z,s)\right)\frac{dr}{r^{\frac{n}{2\alpha}+2}} \\
&\le Ct(\kappa_\tau^{(\alpha)}[\mu])\int_t^\infty \frac{(r-t)^{\frac{n}{2\alpha}}}{r^{\frac{n}{2\alpha}+2}}dr \\
&= C(\kappa_\tau^{(\alpha)}[\mu])
\end{aligned}
$$

と評価できるから，定理は示された．

注意 5.1.
放物型 Bergman 空間 b_α^p についても，例えば定理 5.2 のような Carleson 測度不等式が知られている．

定理 5.2 (Carleson measure inequality on b_α^p, Theorem 1 of [NSY]).
$1\le p\le q<\infty$，μ を $\mathbb{R}_+^{n+1}$ 上 Borel 測度とする．このとき，ある定数 $C>0$ が存在して $u\in b_\alpha^p$ に対して，μ が q/p-Carleson 測度であることと，Carleson 測度不等式 $\|u\|_{L^q(d\mu)}\le C\|u\|_{L^p(dV)}$ が成立することは必要十分である．

しかしながら，今回扱っている Carleson 測度不等式は，$\tau=\frac{n}{2\alpha}/(\frac{n}{2\alpha}+1)$ のときにあたり，命題 3.3 における測度の同値性のための仮定を満たさない．放物型 Bergman 空間における証明の手法をそのまま使うことはできない．

参考文献

[BL] J. Bergh, J. Löfström, *Interpolation Spaces*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, 1976.

[BS] C. Bennett, R. Sharpley, *Interpolation of operators*, Pure and Applied Math. **129**, Academic Press, Inc. 1988.

[GLM] L. Grafakos, E. Laeng, C. Morpurgo, *Inequalities for Poisson integrals with slowly growing dimensional constants*, Publ. Mat. **51** (2007), 59-75.

[NSS] M. Nishio, N. Suzuki, K. Shimomura, *α-parabolic Bergman spaces*, Osaka J. Math. **42** (2005), 153-162.

[NSY] M. Nishio, N. Suzuki, M. Yamada, *Toeplitz operators and Carleson measures on parabolic Bergman spaces*, Hokkaido Math. J. Vol. **36** (2007), 563-583.

[SW] E. M. Stein and G. Weiss, *Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces*, Princeton Univ. Press, Princeton, 1971.

[V] I. E. Verbitsky, *A Dimension-free Carleson Measure Inequality*, Oper. Theory Advanced and Applications, Vol. **113** (2000), 393-398.